3-3 微分公式

由一個函數 $f(x)$ 求其導函數 $f'(x)$ 的過程，通常稱為對此函數的微分。在 3-2 節中，我們求導數時，均由定義逐步求出，顯得繁瑣費事，現在我們要介紹一些求導數的基本性質，可用來簡化導數的求法，一般稱為微分公式。

微分公式 1

若 $f(x)=k$，k 為常數，則 $f'(x)=0$。

證明

設 a 為 $f(x)$ 定義域中的任一實數，則

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{k-k}{x-a}=0$$

故 $f'(x)=0$

微分公式 2

若 $f(x)=x^n$，n 為正整數，則 $f'(x)=nx^{n-1}$。

證明

設 a 為 $f(x)$ 定義域中的任一實數，則

$$\begin{aligned}
f'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
&=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}\\
&=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}\times a+\cdots+a^{n-1}\right)}{x-a}\\
&=\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+x^{n-2}\times a+\cdots+a^{n-1}\right)\\
&=a^{n-1}+a^{n-2}\times a+\cdots+a^{n-1}=na^{n-1}
\end{aligned}$$

故 $f'(x)=nx^{n-1}$

微分公式 3

設 c 為常數，若 $f(x)$ 為可微分函數且 $g(x)=cf(x)$，則
$g'(x)=cf'(x)$。

證　明

設 a 為 $g(x)$ 定義域中的任一實數，則

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{cf(x)-cf(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{c[f(x)-f(a)]}{x-a} \\ &= c\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=c\times f'(a) \end{aligned}$$

故 $g'(x)=cf'(x)$

例題 1

試求下列各函數的導函數。

(1) $f(x)=5$　(2) $f(x)=x^5$　(3) $f(x)=3x^2$

解　由微分公式得

(1) $f'(x)=0$　(2) $f'(x)=5x^4$　(3) $f'(x)=3\times 2x=6x$

隨堂練習

1. 試求下列各函數的導函數。

(1) $f(x)=-10$　(2) $f(x)=x^{10}$　(3) $f(x)=5x^3$

微分公式 4

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為可微分函數，且 $h(x)=f(x)+g(x)$，則
$h'(x)=f'(x)+g'(x)$。

證　明

設 a 為 $f(x)$ 與 $g(x)$ 共同定義域中的任一實數，則

$$
\begin{aligned}
h'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{[f(x)+g(x)]-[f(a)+g(a)]}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= f'(a)+g'(a)
\end{aligned}
$$

故 $h'(x)=f'(x)+g'(x)$

小考箱

(　　) 5. 已知 $f(x)=5x^3+3x^2$，則 $f'(x)=15x^2+6x$。

綜合上面 4 個微分公式，我們可以推知多項式函數的導函數如下：

實係數多項式函數 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，則其導函數為 $f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$。

例題 2

設函數 $f(x)=3x^4+5x^2-6x+7$，試求：

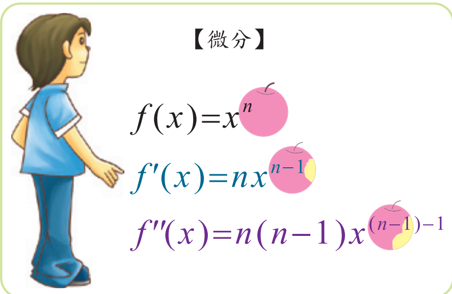
(1) 導函數 $f'(x)$　　(2) 第二階導函數 $f''(x)$。

解 (1) 由多項式函數的導函數得

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4\times3x^3+2\times5x-6\\
&= 12x^3+10x-6
\end{aligned}
$$

(2) 第二階導函數

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 3\times12x^2+10\\
&= 36x^2+10
\end{aligned}
$$



▲秘訣

隨堂練習

2. 設函數 $f(x)=x^3-3x^2+5x-2$，試求：

(1)導函數 $f'(x)$　　(2)第二階導函數 $f''(x)$。

【註】 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，

則因為 $f(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)+f(a)$

由極限的四則運算性質得

$$\lim_{x\to a}f(x)=\left[\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]\times\left[\lim_{x\to a}(x-a)\right]+\lim_{x\to a}f(a)$$

$$=f'(a)\times 0+f(a)=f(a)$$

故得若 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

微分公式 5

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為可微分函數且 $h(x)=f(x)\times g(x)$，則

$h'(x)=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$。

證　明

設 a 為 $f(x)$ 與 $g(x)$ 共同定義域中的任一實數，則

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(x)(f(x)-f(a))+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(g(x)\times\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+f(a)\times\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)\times\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$
$$+\left(\lim_{x\to a} f(a)\right)\times\left(\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$$

（因 $g(x)$ 是可微分函數，故為連續函數，所以 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$ ）

$$=g(a)\times f'(a)+f(a)\times g'(a)$$

故 $h'(x)=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$

例題 3

設 $f(x)=(2x-5)(x^2+2x-1)$，試求：

(1) $f'(x)$　　(2) $f'(2)$　　(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$。

解 (1) 由微分公式 5 得

$$f'(x)=2(x^2+2x-1)+(2x-5)(2x+2)$$
$$=6x^2-2x-12$$

(2) $f'(2)=6\times 2^2-2\times 2-12$

$$=8$$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=8$

隨堂練習

3. 設 $f(x)=(x^2+x-3)(3x^2-2x+1)$，試求：(1) $f'(0)$　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3}{x}$。

由微分公式 5 可推知，若 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 為可微分函數且 $k(x)=f(x)\times g(x)\times h(x)$，

則 $k'(x)=f'(x)\times g(x)\times h(x)+f(x)\times g'(x)\times h(x)+f(x)\times g(x)\times h'(x)$。

如果 $f(x)=g(x)=h(x)$，即 $k(x)=(f(x))^3$，那麼

$$k'(x)=f'(x)\times f(x)\times f(x)+f(x)\times f'(x)\times f(x)+f(x)\times f(x)\times f'(x)$$
$$=3(f(x))^2\times f'(x)$$

依此類推，可得

微分公式 6

若 n 為正整數，$f(x)$ 為可微分函數，則 $(f(x))^n$ 的導函數為

$$n(f(x))^{n-1}\times f'(x)$$

【註】 此為可微分函數微分的連鎖法則。

例題 4

設 $f(x)=(2x+1)^4$，試求：

(1) $f'(-1)$

(2) 以 $(-1,1)$ 為切點的切線斜率。

解 (1) 由微分公式 6 得

$f'(x)=4(2x+1)^3\times 2=8(2x+1)^3$

故 $f'(-1)=8(-2+1)^3=-8$

(2) 以 $(-1,1)$ 為切點之切線斜率為 $f'(-1)=-8$

隨堂練習

4. 設 $f(x)=(x^2-3)^5$，試求：

(1) $f'(2)$

(2) 以 $(2,1)$ 為切點的切線斜率。

微分公式 7

設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為可微分函數且 $g(x)\neq 0$

(1) 若 $h(x)=\dfrac{1}{g(x)}$，則 $h'(x)=-\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

(2) 若 $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，則 $k'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

證　明

設 a 為 $g(x)$ 定義域中任一實數，則

(1) $h'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{g(a)}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)(x-a)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{-1}{g(x)g(a)}\times\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\right]$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{-1}{g(x)g(a)}\times\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$

（因 $g(x)$ 是可微分函數，故為連續函數，所以 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$ ）

$=-\dfrac{1}{[g(a)]^2}\times g'(a)=-\dfrac{g'(a)}{[g(a)]^2}$，故得 $h'(x)=-\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$

(2) 因為 $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}$

所以 $k'(x)=f'(x)\times\dfrac{1}{g(x)}+f(x)\times\dfrac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$

$=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

例題 5

設 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$，試求 $f'(x)$。

解　由微分公式 7 得

$$f'(x)=\frac{2(x^2+2)-2x(2x+0)}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{2x^2+4-4x^2}{(x^2+2)^2}=\frac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$$

隨堂練習

5. 設 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-x+1}$，試求 $f'(1)$。

習題 3-3

1. 試求下列各函數的導函數。
(1) $f(x)=100$　(2) $f(x)=x^{20}$　(3) $f(x)=10x^5$。

2. 設函數 $f(x)=x^5-4x^3+2x-5$，試求：
(1) 導函數 $f'(x)$　(2) 第二階導函數 $f''(x)$。

3. 設函數 $f(x)=(x^3-2)(4x+1)$，試求 $f'(1)$ 的值。

4. 設函數 $f(x)=(2x+1)(3x+1)(5x-2)$，試求 $f'(0)$ 的值。

5. 設函數 $f(x)=(x^2+3x-2)^2$，試求：
(1) $f'(1)$　(2) 以 $(1, 4)$ 為切點的切線方程式。

6. 設 $f(x)=x^3-2x^2+3$，試求：
(1) $f'(x)$　(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$　(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$。
（提示：(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$　(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$）

7. (1) 設 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，試求 $f'(x)$。(2) 設 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$，試求 $f'(-1)$。